Bewegungsgl.

gleichm. beschl.:

$a = \ddot{r} = const.$

$v = \dot{r} = \int a\,dt = v_0 + a \cdot t$

$r = \int v\,dt = r_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$

freier Fall:

$h = \frac{1}{2} g t^2$

Newton

in Inertialsystemen

Newton 1:

$\vec{F} \sim \vec{a}$ Trägheit

$\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} = \vec{0}$

Newton 2:

$\vec{F} = m\vec{a}$ $\vec{F}_{ext} = M \vec{a}_s$ actio

$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \dot{\vec{p}}$

Newton 3:

$\vec{F}_{A \to B} = -\vec{F}_{B \to A}$ reactio

Energie

konservativ eindim.

Gravitation konstante F

Kin.: $K = E_{Kin} = \frac{1}{2} m v^2$ $[K] = 1\,J$

Pot.: $U = E_{pot} = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{F}_{kons.} \cdot d\vec{r} = m \cdot g \cdot h$

Arbeit: $W = \Delta K = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\,dx$ $[W] = 1\,J$

Leistung: $P = \frac{dW}{dt} = \vec{F}_{const.} \cdot \vec{v}$ $[P] = 1\,\frac{J}{s}$

EES: $E = E_{mech} = K + U$ $\frac{d}{dt}(E) = 0$ $E_i = E_f$

Schwerpunkt

von außen: m_{ges} in $\vec{r}_s$, $\vec{F}_{ges}$ an $\vec{r}_s$

ohne $\vec{F}$: $\vec{r}_s$ bewegt sich geradl., gleichf.

System von Massepunkten: kontinuierliche Masse:

$\vec{r}_s = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i = \frac{1}{M} \int \vec{r} \rho(\vec{r})\, d^3\vec{r}$

Masse

schwere $m_g = \frac{F_g}{g}$ träge $m_i = \frac{F}{a}$

$m_i = m_g \equiv m$

Dichte: $\rho(\vec{r}) = \frac{dm}{dV}$ $M = \int \rho(\vec{r})\, d^3\vec{r}$

Konservative Kraftfelder

$rot\,\vec{F} = 0$ $\vec{F} = -\vec{\nabla}\phi$ $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$ $\int_{C_1, \vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{C_2, \vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{s}$

falls $\frac{dm}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dU}{dt} = -\vec{F} \cdot \vec{v}$ $\frac{dK}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$

Reibung

$N = m \cdot g$ Gravitation (normalerw.)

Coulomb-Reibung:

statisch: $f_s = \mu_s \cdot N$ kinetisch: $f_k = \mu_k \cdot N$ $\mu_s > \mu_k$

Rollreibung:

$f_r \propto \frac{N}{\sqrt{r}}$

$f_r = \mu_r N$

Amonton:

1. $f \propto N$
2. f unabh. $A_{Kontakt}$
3. f_k unabh. v

Stokes-Reibung:

laminar: $f_d \propto v$ turbulent: $f_d \propto v^2$

Strömungswiderstand:

$f_d = \frac{1}{2} C_d \rho A v^2$

Impuls + Stöße

Impuls: $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ $\Delta\vec{p} = \int \vec{F} dt$ $\vec{P} = M \cdot \vec{v}_s$

IES: $\vec{F}_{ext} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{P} = const.$

Raketengleichung: $v_f = v_i + v_{rel} \ln\left(\frac{M_i}{M_f}\right)$

Kraftstoß/Impulsübertrag: $\vec{J} \equiv \Delta\vec{p} = \int \vec{F} dt$

Stoßserien: $J = -n\Delta p$ $\langle F \rangle = \frac{J}{\Delta t} = -\frac{n}{\Delta t} m \Delta v$

Energie: $K_i = K_f + Q$ Elast.: $Q = 0$, EES gilt

auf ruhendes Objekt: $v_{2,i} = 0$

$v_{1,f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1,i}$ | $v_{2,f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1,i}$ | $v_{2,f} - v_{1,f} = v_{1,i}$

$\rightarrow m_1 = m_2$: $v_{1,f} = 0$ $v_{2,f} = v_{1,i}$

$\rightarrow m_2 \gg m_1$: $v_{1,f} \approx -v_{1,i}$ $v_{2,f} \approx \frac{2m_1}{m_2} v_{1,i}$

$\rightarrow m_1 \gg m_2$: $v_{1,f} \approx v_{1,i}$ $v_{2,f} \approx 2 v_{1,i}$

auf bewegtes Objekt:

$v_{1,f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1,i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2,i}$

$v_{2,f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1,i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2,i}$

$v_{2,f} - v_{1,f} = v_{1,i} - v_{2,i}$

Stoßzahl: $\varepsilon = 1$ el., $\varepsilon = 0$ voll inel., $\varepsilon < 1$ inel. ex.

Teilelastisch: $\varepsilon = \frac{v_{2,f} - v_{1,f}}{v_{1,i} - v_{2,i}}$ $\delta = 1 - \varepsilon$

$K_f = K_i \left[1 - \delta m_2 \left(\frac{2 - \delta}{m_1 + m_2}\right)\right]$

Zweidimensional mit Vektoren

Gravitation

Kraft: $\vec{F}_G = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{e}_r = G \frac{Mm}{r^2} \vec{e}_r$

Abh. von h: $a_g \approx a_{g,0}\left(1 - \frac{2h}{r}\right)$

Potential: $U = -\frac{GMm}{r}$ $-\nabla U = \vec{F}_G$ $-\frac{dU}{dr} = F(r)$

Fluchtges.: $v_F = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{2 g_0 R}$

Kepler:

1. Planetenbahnen Ellipsen, Sonne im Fokus
2. $\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} = \frac{1}{2} r^2 \omega = const.$
3. $\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$ $\frac{T_i^2}{a_i^3} = const.$ für alle $i = \frac{4\pi^2}{GM}$

$\frac{GMm}{r^2} = m\omega^2 r \Rightarrow T^2 = \left(\frac{2\pi}{\omega}\right)^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM}\right) r^3$

Satelliten: $U = -\frac{GMm}{r}$ $K = \frac{U}{2} = \frac{GMm}{2r}$ $E = -\frac{GMm}{2r}$

Ellipsen: $U = -\frac{GMm}{r}$ $K = \frac{GMm}{2}\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$ $E = -\frac{GMm}{2a}$

$r_{max} = (1 + e) a$ $T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM}\right) a^3$

Rotation

Winkel $\vec{\theta}$ starrer Körper

Winkelges.: $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\theta}}{dt}$ $[\omega] = 1\,\frac{rad}{s}$

Winkelbeschleunigung: $\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\theta}}{dt^2}$ $[\alpha] = 1\,\frac{rad}{s^2}$

Bewegungsgl.:

$\omega = \omega_0 + \alpha t$ $\theta = \theta_0 + \omega t + \frac{1}{2}\alpha t^2$

Übersetzung aus Translation:

$s \to \theta$ $v \to \omega$ $a \to \alpha$ $m \to I$ $F \to \tau$ $p \to L$

Skalar:

$s = \theta r$ $v = \omega r$ $a_t = \alpha r$ $a_r = \omega^2 r$

Vektor:

$\vec{s} = r\Delta\theta\vec{e}_\theta + \Delta r\vec{e}_r$ $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ $\vec{a} = \alpha r\vec{e}_\theta - \omega^2 r\vec{e}_r$

Kinetische Energie: $E = \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i r_i^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2} I\omega^2$

Trägheitsmoment: $I = \sum_i m_i r_i^2$

Steiner: $I = I_s + Mh^2$ h: Abstand Drehachse zu v_s $I = \int r^2 dm$

Drehmoment: $\vec{\tau} = \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ Kraft, Hebelarm

$\tau = r F_t$ $[\tau] = 1\,Nm \neq [W]$ Newton 2: $\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$

Drehimpuls: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v}) = I\vec{\omega}$ $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

Erhaltungssatz: $\sum \vec{\tau} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = const.$

Kreisbewegung

gleichm.

$\vec{r} = r\cos\theta\,\vec{e}_x + r\sin\theta\,\vec{e}_y$ $|\vec{v}| = \omega r = const.$

$\vec{\omega} = \frac{d\theta}{dt}\vec{e}_z = const.$ $\vec{v} = -\omega r \sin\theta\,\vec{e}_x + \omega r\cos\theta\,\vec{e}_y$

$\vec{a} = -\omega^2\vec{r} = -\frac{v^2}{r}\vec{e}_r$ $\vec{F}_z = -\frac{mv^2}{r}\vec{e}_r$

Rollbewegung:

Reines Rollen: $v_s = \omega R$

Schiefe Ebene mit Winkel θ: $a = \frac{MR^2 g \sin\theta}{MR^2 + I_s}$

Kin. Energie: $K = \frac{I_P \omega^2}{2}$

mit Steiner: $K = \underbrace{\frac{I_s\omega^2}{2}}_{rot} + \underbrace{\frac{M v_s^2}{2}}_{trans}$

Stöße starrer Körper:

$\Delta\vec{v}_s = \frac{\Delta\vec{p}}{m}$ $\Delta\vec{\omega}_s = \frac{\Delta\vec{L}}{I_s}$ $F_s = \mu_s F_N = \mu_s \frac{\Delta p_N}{\Delta t}$

Nichtinertialsysteme

System rotiert mit ω: $\frac{d\vec{a}}{dt} = \dot{\vec{q}} + \vec{\omega} \times \vec{q}$ für jed. Vektor $\vec{q}$

Gyroskop:

Rot. $\frac{dL_s}{dt} = I_s \dot{S} = 0$

Präz. $S \approx \frac{mgl}{I_s \dot{\varphi}}$ $\dot{\varphi} \approx \frac{mgl}{I_s S}$

Euler:

$$\vec{\tau} = \begin{pmatrix} I_{xx}\dot{\omega}_x + \omega_y\omega_z(I_{zz} - I_{yy}) \\ I_{yy}\dot{\omega}_y + \omega_z\omega_x(I_{xx} - I_{zz}) \\ I_{zz}\dot{\omega}_z + \omega_x\omega_y(I_{yy} - I_{xx}) \end{pmatrix}$$

Scheinkräfte: $F_{cor} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}$

$F_{trans} = -m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}$ $F_{zent} = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

Gleichgewicht

$\sum \vec{F}_i = 0$, $\sum \vec{\tau}_i = 0$, $\vec{\nabla} U = 0$

Minimum, stabil: $\nabla^2 U > 0$

Maximum, labil: $\nabla^2 U < 0$

Flach, indifferent: $\nabla^2 U = 0$

Trägheitsmomente:

Hoop about central axis: $I = MR^2$

Solid cylinder/disk about central axis: $I = \frac{1}{2}MR^2$

Annular cylinder/Ring about central axis: $I = \frac{1}{2}M(R_1^2 - R_2^2)$

Solid cylinder/disk about central diameter: $I = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2$

Thin rod about axis through center perpendicular to length: $I = \frac{1}{12}ML^2$

Solid sphere about any diameter: $I = \frac{2}{5}MR^2$

Thin spherical shell about any diameter: $I = \frac{2}{3}MR^2$

Hoop about any diameter: $I = \frac{1}{2}MR^2$

Slab about perpendicular axis through center: $I = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$

Hydrostatik

ideales Fluid: $G = 0$

$P = \frac{F}{A}$ Kompressibilität: $\kappa = -\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial P}$

$\rho(p) = \rho(0)\frac{V}{V+\Delta V} = \rho(0)(1+\kappa p)$

$p(z) = \int_0^z \frac{\rho g \cdot dA}{dA} dz' \approx \rho g z$

Archimedes: $\Delta p = \rho_{fl} g \Delta h$ $\quad F_A = \rho_{fl} g A \Delta h$

Boyle: $\frac{P}{\rho} = \frac{P_0}{\rho_0}$ $\quad P(h) = P_0 \exp(-g\rho_0 \frac{h}{P_0})$

Oberflächenspannung /-energie: $\varepsilon \equiv \sigma$

$\varepsilon = \frac{\Delta W}{\Delta A}$, $[\varepsilon] = 1\frac{J}{m^2}$ $\quad \sigma = \frac{\Delta F}{\Delta L}$, $[\sigma] = 1\frac{N}{m}$

Elastizität

Spannung $\sigma = \frac{F}{A}$ Dehnung $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$ ~ Umin $\varepsilon = \frac{1}{E}\sigma$

Poisson: $\mu = \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta L}{L} + 2\frac{\Delta d}{d} = \varepsilon(1-2\nu)$ $\quad \nu = -\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_y}$

Scherung: $\frac{F}{A} = G\frac{\Delta x}{L}$ Schubmodul $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

Zähigkeit: $\frac{E}{V} = \int_0^{\varepsilon_f} \sigma \, d\varepsilon$ $\quad$ Kompressibilität:

Hydrost. Druck: $\Delta P = B\frac{\Delta V}{V}$ $\quad B = \frac{1}{\kappa} = \frac{E}{3(1-2\nu)}$

Biegung: $s = \frac{4L^3}{Ed^3}\frac{F}{b}$

Torsion: $\tau = -\frac{\pi}{2}G\frac{r^4}{L}\phi \equiv -\kappa\phi$ $\quad P = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}}$

Hydrodynamik

ideales Fluid: $\eta = 0$

Reynolds-Zahl: $R = \frac{\rho}{\eta} v \cdot D$

klein ~ ±10^3 / groß

$\eta \to \infty$: $f_d \propto \eta v$ — laminar

$f_d = \frac{1}{2}c_w(R)\rho A v^2$

$\eta \to 0$: $f_d \propto \frac{1}{2}c_w \rho A v^2$ — turbulent

Hagen-Poiseuille: (Rohrströmung)

$\dot{V} = \frac{\pi(p_2 - p_1)}{8\eta L}R^4$

Kutta-Jaukowski:

$\frac{F}{L} = \rho v \oint v \, ds$

Stokes:

$F = 6\pi\eta v r$

Bernoulli: gilt für:

$\frac{\partial p}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$, $\vec{\nabla}\times\vec{v} = 0$, $\eta = 0$

$\Rightarrow p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z = \text{const.}$

$\Rightarrow$ Austrittsgeschwindigkeit:

$v_{aus} = \sqrt{2gh}$

Viskosität: $\quad$ v linear

Innere Reibung: $F = \eta A\frac{dv}{dz} = \eta A\frac{v}{d}$ $\quad [\eta] = 1\frac{Ns}{m^2} = 1\,Pa\,s = 1\frac{kg}{m\,s}$

Scherkräfte: $\frac{F}{A} = G\frac{\Delta x}{L}$ $\quad \sigma_n = \frac{F}{A} = \eta\frac{dv}{dz} = \eta\frac{d}{dt}\frac{\Delta x}{L}$

Kapillare: $h = \frac{\sigma_{LG}\cos\theta}{r\rho g}$ $\quad$ Kontinuität: $A_1 v_1 = A_2 v_2$

1. HS: $\Delta U = Q - W$ $\quad dU = \delta Q - \delta W$

$\Delta U = -W \; (Q = 0)$ $\quad \Delta U = Q \; (W = 0)$

Id. Gas: $W = nRT\ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$ $(T = \text{const.} \Rightarrow \Delta U = 0)$

$C_V = \left(\frac{f}{2}\right)R = f \cdot 4.16\frac{J}{mol\,K}$

$C_P = C_V + R$

adiabatisch: $\gamma = \frac{c_P}{c_V}$

$pV^\gamma = \text{const.}$

$TV^{\gamma-1} = \text{const.}$

Maschinen: $\eta = \frac{|W|}{|Q_H|}$

$W = |Q_H| - |Q_L|$ $\quad \Delta S = \frac{|Q_H|}{T_H} - \frac{|Q_L|}{T_L}$

Carnot:

$\eta_C = \frac{|Q_H| - |Q_L|}{|Q_H|} = 1 - \frac{T_L}{T_H}$

Kältem.:

$\varepsilon = \frac{|Q_L|}{W}$ $\quad \varepsilon_C = \frac{|Q_L|}{|Q_H| - |Q_L|} = \frac{T_L}{T_H - T_L}$

Thermodynamik

Tripelpunkt: 3 Phasen Wasser: $p_3 = 611{,}7\,Pa$, $T_3 = 273{,}16\,K$

Ideales-Gas-Gesetz: $pV = Nk_BT = nRT$

Wärme: Q $\quad [Q] = 1\,J$ $\quad 1\,cal = 4190\,J$

Wärmeausdehnung: $\Delta L = L\alpha\Delta T$ $\quad \Delta V = 3V\alpha\Delta T$

Wärmekapazität: $Q = C\Delta T$ $\quad [C] = 1\frac{J}{K}$

Spezifische Wärme: $c = \frac{C}{m}$ $\quad Q = c \cdot m \cdot \Delta T$ $\quad [c] = 1\frac{J}{kg \cdot K}$

molare Wärmekapazität: $Q = n \cdot C_m\Delta T$ $\quad C_m \approx 3k_BN_A/mol$

Umwandlungswärme: Dulong-Petit $\to \approx 24{,}94\frac{J}{mol \cdot K}$

$Q = L \cdot m$ $\quad$ Wärmeleitung: $\dot{Q} = \kappa\frac{A}{L}(T_H - T_C)$

Wärmeleitfähigkeit $[\kappa] = 1\frac{W}{m \cdot K}$ $\quad \dot{Q} = \frac{A(T_H - T_C)}{\sum_i L_i/\kappa_i}$

Durch Verbundplatte $(\kappa_1, \kappa_2, \ldots)$:

R-Wert: $R = \frac{L}{\kappa}$ $\quad [R] = 1\frac{m^2 \cdot K}{W}$ $\quad \dot{Q} = \frac{A(T_H - T_C)}{\sum_i R_i}$

Stefan-Boltzmann: $R(t) = j^* = \varepsilon\sigma T^4$ $\quad [j^*] = \frac{W}{m^2}$

anderes R ! $\quad$ Emissionsgrad: $0 < \varepsilon < 1$ $\quad \dot{Q}(T) = R(t) \cdot A$

Emission/Absorption: $\dot{Q}(t) = \varepsilon\sigma A(T_{env}^4 - T^4)$

Parallele Platten: $j_2 = \frac{\varepsilon\sigma}{2-\varepsilon}(T_2^4 - T_1^4)$ $\quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$

Effektiver R-Wert: $R = \frac{2-\varepsilon}{4\varepsilon\sigma T^3}$

Wärmeleitungsgleichung: $\vec{j} = -\kappa\vec{\nabla}T$ $\quad$ 2D: $j = \frac{\dot{Q}}{A} = -\kappa\frac{dT}{dx} = -\kappa\frac{\Delta T}{L}$

3D: $\frac{\dot{Q}}{V} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{j}$ $\quad \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{c\rho}\nabla^2 T$

Entropie: $\Delta S = S_f - S_i = \int_i^f \frac{dQ}{T} = \frac{Q}{T} = \frac{Q}{T_{gem}} = nR\ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) + nC_V\ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right)$

isotherm $\quad \Delta T \ll T$ $\quad$ ideales Gas, revers.

2. HS: $\Delta S \geq 0$

$=$ reversibel, $>$ irreversibel

Schwingungen

Bewegungsgleichung:

$x(t) = x_m\cos(\omega t + \phi)$

x_m: Amplitude

ω: Frequenz

ϕ: Phasenverschiebung

$f = \frac{\omega}{2\pi}$: Frequenz

$T = \frac{1}{f}$: Periode

Ableitungen:

$\dot{x}(t) = -\omega x_m\sin(\omega t + \phi)$

$\ddot{x}(t) = -\omega^2 x_m\cos(\omega t + \phi) = -\omega^2 x(t)$

Energie

Pot.: $U(t) = \frac{1}{2}k x_m^2\cos^2(\omega t + \phi)$

Kin.: $K(t) = \frac{1}{2}k x_m^2\sin^2(\omega t + \phi)$

Mech: $E(t) = \frac{1}{2}k x_m^2 = \text{const.}$

Kraft: $F(t) = -m\omega^2 x(t) = -kx$

$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ $\quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

Differentielle Form:

$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

Ungedämpft: $\gamma = 0$

Aperiodischer Grenzfall: $\gamma = \omega_0$

Interferenz

$\omega_1 = \omega_2 = \omega$:

$q_1 = a\sin(\omega t + \phi_1)$

$q_2 = b\sin(\omega t + \phi_2)$

$q = q_1 + q_2 = c\sin(\omega t + \phi)$

Konstruktiv: $\phi_1 = \phi_2$

$c = a + b$

Destruktiv: $\phi_2 = \phi_1 \pm \pi$

$c = |a - b|$

$\omega_1 \neq \omega_2$:

$q_1 = a\cos(\omega_1 t)$

$q_2 = a\cos(\omega_2 t)$

$q = q_1 + q_2$

$= 2a\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right)$

Dämpfung

Stokes: $m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}$

$\Rightarrow \omega_0^2 = \frac{k}{m}$ $\quad 2\gamma = \frac{b}{m}$

Allg. Lösung: $(\alpha = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})$

$x(t) = c\,e^{-\gamma t}\left[c_1 e^{\alpha t} + c_2 e^{-\alpha t}\right]$

Schwache Dämpfung: $\gamma < \omega_0$:

$\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$

$x(t) = Ae^{-\gamma t} \cdot \cos(\omega t + \phi)$

Starke Dämpfung: $\gamma > \omega_0$:

Nur Kin. Energie bei $t = 0$:

$\dot{x}(0) = v_0$ $\quad x(0) = 0$

$\Rightarrow x(t) = \frac{v_0}{\alpha}e^{-\gamma t}\sinh(\alpha t)$

Nur pot. Energie bei $t = 0$:

$\dot{x}(0) = 0$ $\quad x(0) = A$

$\Rightarrow x(t) = Ae^{-\gamma t}\left[\cosh(\alpha t) + \frac{\gamma}{\alpha}\sinh(\alpha t)\right]$

Aperiodischer Grenzfall:

Kritische Dämpfung: $\gamma = \omega_0$

$x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-\gamma t}$

Nur Kin. E.: $x(t) = v_0 t e^{-\gamma t}$

Nur pot. E.: $x(t) = A(1 - \gamma t)e^{-\gamma t}$

Gek. Oszillatoren:

$m\ddot{x}_1 = -m\omega_0^2 x_1 - k(x_1 - x_2)$

$m\ddot{x}_2 = -m\omega_0^2 x_2 - k(x_2 - x_1)$

$x_1 = A_1 e^{i\omega t}$ $\quad x_2 = A_2 e^{i\omega t}$

$\left(\omega^2 - \omega_0^2 - \frac{k}{m}\right)A_1 = -\frac{k}{m}A_2$

$\left(\omega^2 - \omega_0^2 - \frac{k}{m}\right)A_2 = -\frac{k}{m}A_1$

2 Grundmoden:

$\omega^2 = \omega_0^2 \Rightarrow A_1 = A_2$

$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{2k}{m} \Rightarrow A_1 = -A_2$

Fourier: Koeffizienten

$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt$

$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)\,dt$

$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(n\omega t)\,dt$

Anregung + Resonanz:

$\omega_{eigen}^2 = \omega_0^2 - \gamma^2 = \frac{k}{m} - \gamma^2$, $2\gamma = \frac{b}{m}$

Periodd. äuß. Kraft: $F_0\cos(\omega t)$

Kleine Anregungsfrequenz:

$x(t) = \frac{F_0}{k}\cos(\omega t) \Rightarrow \omega_{eigen} \gg \omega$

Große Anregungsfrequenz:

$x(t) = -\frac{F_0}{m\omega^2}\cos(\omega t)$ $\quad v(t) = \frac{F_0}{m\omega}\sin(\omega t)$

Auslenkung eilt Kraft um π voraus $\Rightarrow$ System nimmt im Mittel keine Energie auf.

Mittlere Anregungsfrequenz (Res.):

Phasenunterschied $\frac{\pi}{2} \Rightarrow$ Kraft und Geschwindigkeit stets gleichs. $\Rightarrow$ ständige Leistungsaufnahme

$x(t) = x_0\sin(\omega t)$

$P = F\dot{x} = F_0\omega x_0\cos^2(\omega t)$

Stationärer Zustand:

Leistungsverbr. = aufg. Leistung

$\Rightarrow x_0 = \frac{F_0}{b\omega}$ (unged. Oszillator)

$\Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$Q = \frac{m\omega_0}{b}$ $\quad \Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$

Fourier-Reihen

für periodische Funktionen f mit T:

$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)\right)$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$

Wellen

Bewegungsgleichung (Transversalwellen)

$y(x,t) = y_m\sin(k \cdot x - \omega \cdot t)$

y_m: Amplitude

k: Wellenzahl

$\lambda = \frac{2\pi}{k}$: Wellenlänge

$T = \frac{2\pi}{\omega}$: Periode

$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$: Frequenz

$x_{max} = \frac{\omega t}{k}$

Phasengeschwindigkeit:

$v = \frac{dx_{max}}{dt} = \frac{\omega}{k} = \lambda f$

d'Alembert:

2D: $\ddot{y} = \frac{F}{\mu}y''$

Lsg.: $y(x,t) = f(kx - \omega t) + g(kx + \omega t)$

3D: $\frac{\partial^2\vec{\xi}}{\partial t^2} = c^2\nabla^2\vec{\xi}$ $\quad c = \frac{dr}{dt}$ $\quad \Box\vec{\xi} = 0$

Im Raum:

$\vec{\xi} = \vec{\xi}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$ $\quad$ Longit.: $\vec{\xi}_0 \parallel \vec{k}$ $\quad$ Transv.: $\vec{\xi}_0 \perp \vec{k}$

In Ebene ($\vec{k}\cdot\vec{r} = \text{const.}$): Auslenkung const.

Superposition

Überlappende Wellen beeinfl. sich nicht.

Überlagerung: algebraische Summe

(Addierung der Amplituden)

Intensität

$\langle I\rangle = \langle u\rangle v = \frac{\rho v\omega^2 y_m^2}{2} \Rightarrow \langle I\rangle \propto y_m^2$

Energietransport:

Energiedichte:

$u = \mu\omega^2 y_m^2\cos^2(kx - \omega t)$

$\langle u\rangle = \frac{\mu\omega^2 y_m^2}{2}$

$P_{ave} = \langle u\rangle v = \frac{\mu v\omega^2 y_m^2}{2}$

Ziel: $\bar{I} = \frac{\bar{P}}{A} = \frac{\bar{E}}{A\,t}$ $\quad \bar{I} \sim \frac{1}{r^2}$

Interferenz:

Gleiche Wellenlänge, Amplitude und Richtung:

$y_1(x,t) = y_m\sin(kx - \omega t)$ $\quad y_2(x,t) = y_m\sin(kx - \omega t + \phi)$

$\Rightarrow y(x,t) = y_1 + y_2 = 2y_m\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\sin(kx - \omega t + \phi)$

Entgegengesetzte Richtung: stehende Wellen

$y_1(x,t) = y_m\sin(kx - \omega t)$ $\quad y_2(x,t) = y_m\sin(kx + \omega t)$

$y(x,t) = y_1 + y_2 = 2y_m\cos(\omega t)\sin(kx)$ $\quad \phi = \frac{2\pi\Delta d}{\lambda}$

Knoten bei: $kx = n \cdot \pi$ oder $x = n\frac{\lambda}{2}$ $\quad n \in \mathbb{Z}$

Schallwellen:

Im Material: $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$

In Luft: $v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$

Intensität: $I = \frac{P}{A} = \frac{1}{2}\rho v\omega^2 s_m^2$

Dezibel: $I_{dB} = (10\,dB)\log_{10}\frac{I}{I_0}$

$I_0 = 10^{-12}\frac{W}{m^2}$ $\quad p_0 = 20\,\mu Pa$

Resonanz:

zwei Enden

$\lambda_n = \frac{2L}{n}$ $\quad n = 1,2,3,\ldots$

zwei offene Enden

$\lambda_n = \frac{2L}{n}$ $\quad n = 1,2,3,\ldots$

$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{nv}{2L}$

ein offenes Ende

$\lambda_n = \frac{4L}{n}$ $\quad n = 1,3,5,\ldots$

$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{nv}{4L}$

Wasserwellen:

$v_p = \frac{\omega}{k}$

Dispersion: $\frac{\omega}{k} \neq \text{const.}$

Gruppengeschwindigkeit: $v_g = \frac{\partial\omega}{\partial k}$

$\lambda \gg 17\,mm$: $\omega \propto k^{\frac{1}{2}} \Rightarrow v_g \sim k^{-\frac{1}{2}}$

$\lambda \ll 17\,mm$: $\omega \propto k^{\frac{3}{2}} \Rightarrow v_g \sim k^{\frac{1}{2}}$

Langwellig: (tiefes Wasser)

$\omega = \sqrt{gk}$ $\quad v_p = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}} = \sqrt{\frac{\lambda g}{2\pi}}$

$v_g = \frac{\partial\omega}{\partial k} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda g}{2\pi}} = \frac{v_p}{2}$

Doppler:

$f' = f\frac{v + v_D}{v - v_S}$

Allgemein (nicht relativistisch)

Konstanten + Einheiten

$G = 6{,}674\,30 \cdot 10^{-11}\frac{m^3}{kg \cdot s^2}$ oder $\frac{N \cdot m^2}{kg^2}$

$M_E = 5{,}972 \cdot 10^{24}\,kg$

$r_E = 6\,371\,000\,m = 6\,371\,km$

$M_S = 1{,}989 \cdot 10^{30}\,kg$

$N_A = 6{,}02214 \cdot 10^{23}\,mol^{-1}$

$k_B = 1{,}380\,649 \cdot 10^{-23}\frac{J}{K}$

10^{-12}	10^{-9}	10^{-6}	10^{-3}	10^{3}	10^{6}	10^{9}	10^{12}
piko	nano	mikro	milli	kilo	mega	giga	tera
p	n	μ	m	k	M	G	T

$1\,J = 1\frac{kg \cdot m^2}{s^2} = 1\,Nm$ $\quad 1\,W = 1\frac{J}{s} = 1\frac{kg \cdot m^2}{s^3}$

$1\,N = 1\frac{kg \cdot m}{s^2}$ $\quad 1\,Hz = 1\,s^{-1}$

$1\,Pa = 1\frac{N}{m^2} = 1\frac{kg}{m \cdot s^2}$ $\quad 1\,V = 1\frac{W}{A} = 1\frac{kg \cdot m^2}{s^3 \cdot A}$

$R = 8{,}31\frac{J}{mol \cdot K}$ $\quad$ Wasser: $L_V = 2256\frac{kJ}{kg}$

$\sigma = 5{,}670 \cdot 10^{-8}\frac{W}{m^2 \cdot K^4}$ $\quad L_S = 333\frac{kJ}{kg}$